【1】

a, b は実数で，$a > 0$ とする．z に関する方程式

$$z^3 + 3az^2 + bz + 1 = 0 \quad (*)$$

は 3 つの相異なる解をもち，それらは複素数平面上で 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形の頂点となっているとする．このとき，a, b と $(*)$ の 3 つの解を求めよ．

【解答例】

$$z^3 + 3az^2 + bz + 1 = 0 \quad (*)$$

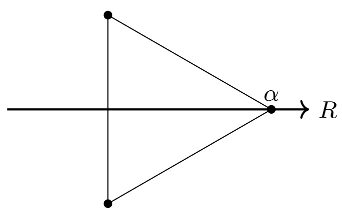
は実数係数三次方程式より, 少なくとも一つの実数解をもつ. これを α とし, 残りの共役な 2 解を β, γ とする.

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -3a \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b \\ \alpha\beta\gamma = -1 \end{cases}$$

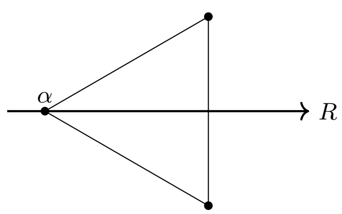
正三角形の重心 $\dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = -a$ は実軸上にあり, 三つの解の表す点の位置関係は次の二通りしかない.

(i)　位置関係が次の図のようなとき



重心から各頂点への距離は a であるが, すると $\alpha = 0$ となり, $\alpha\beta\gamma = -1$ を満足せず不適である.

(ii)　位置関係が次の図のようなとき



このとき, $\alpha = -2a$ で $\beta, \gamma = -\dfrac{a}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}a}{2}i$ で,

$$\begin{cases} \beta + \gamma = -a \\ \beta\gamma = a^2 \end{cases}$$

なる α, β, γ を 3 解にもつ三次方程式は

$$z^3 + 3az^2 + 3a^2z + 2a^3 = 0$$

より

$$2a^3 = 1$$

すなわち

$$\underline{a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$$

また, $b = 3a^2$ から

$$\underline{b = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}}$$

さらに $(*)$ の 3 解

$$\underline{z = -\sqrt[3]{4}, -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \pm \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}i}$$

【2】

p を正の整数とする．α，β は x に関する方程式 $x^2-2px-1=0$ の 2 つの解で，$|\alpha|>1$ であるとする．

(1) すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n+\beta^n$ は整数であり，さらに偶数であることを証明せよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)$ を求めよ．

【解答例】

(1) 解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=2p\\ \alpha\beta=-1\end{cases}$$

が成立する．

$n\geq 1$ に対して

$$a_n=\alpha^n+\beta^n$$

とおく．a_n が偶数であることを数学的帰納法により示す.

(i) $a_1=\alpha+\beta=2p$ は偶数である． さらに，$a_2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4p^2+2=2\left(2p^2+1\right)$ も偶数となっている．したがって, $n=1,2$ のとき, a_n は偶数である．

(ii) k を自然数として, $n=k,k+1$ のときの成立を仮定して, $n=k+2$ での成立を示す.

$$\begin{aligned}a_{k+2}&=\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}\\&=(\alpha+\beta)\left(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}\right)\\&\quad-\alpha\beta\left(\alpha^k+\beta^k\right)\\&=2pa_{k+1}+a_k\end{aligned}$$

a_{k+1}, a_k は偶数の仮定から, a_{k+2} も偶数．よって $n=k+2$ のときも成立.

(i)、(ii)より, $a_n=\alpha^n+\beta^n$ は常に偶数である． ■

(2) $(-\alpha)^n\sin\left(\alpha^n\pi\right)$ について、

$$\begin{aligned}&(-\alpha)^n\sin\left(\alpha^n\pi\right)\\=&(-\alpha)^n\sin\left(a_n\pi-\beta^n\pi\right)\end{aligned}$$

a_n は偶数であるため,

$$\begin{aligned}&=-(-\alpha)^n\sin\left(\beta^n\pi\right)\\&=-(-\alpha)^n\cdot\beta^n\pi\cdot\frac{\sin\left(\beta^n\pi\right)}{\beta^n\pi}\\&=-(-\alpha\beta)^n\,\pi\cdot\frac{\sin\left(\beta^n\pi\right)}{\beta^n\pi}\\&=-\pi\cdot\frac{\sin\left(\beta^n\pi\right)}{\beta^n\pi}\qquad①\end{aligned}$$

ここで, $\left|\alpha\right||\beta|=|\alpha\beta|=1$ と $\left|\alpha\right|>1$ により, $|\beta|<1$ となる.

よって

$$\lim_{n\to\infty}\beta^n\pi=0$$

なので,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\beta^n\pi\right)}{\beta^n\pi}=1$$

より, ①から

$$\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin\left(\alpha^n\pi\right)=\underline{-\pi}$$

【3】

k を正の実数とする．座標空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A，B，C，D が次の関係式を満たしている．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k$$

このとき，k の値を求めよ．ただし，座標空間の点 X，Y に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す．

【解答例】

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと，

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}\\ \vec{a}\cdot\vec{c}=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\\ \vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\end{cases}$$

である．

$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{2}$, $\cos\angle\mathrm{BOC}=\cos\angle\mathrm{COA}=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ より, $\angle\mathrm{AOB}$ は鋭角, $\angle\mathrm{BOC}$, $\angle\mathrm{COA}$ は鈍角のため, O, A, B, C が同一平面にあるためには

$$\angle\mathrm{AOB}+\angle\mathrm{BOC}+\angle\mathrm{COA}=2\pi$$

が必要だが, $\cos(\angle\mathrm{BOC}+\angle\mathrm{COA})=-\dfrac{1}{4}\neq\cos\angle\mathrm{AOB}$ よりこれは成立しない．そのため, O, A, B, C は同一平面上になく, 角の情報からどの 3 点も同一直線状にないため $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は一次独立であることから実数 p, q, r を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ とただ一通りに書ける．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より

$$\left(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}\right)\cdot\vec{b}$$

が得られ，計算すると

$$p=q \qquad ①$$

ある．

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{2}$ より $\left(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}\right)\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$ が得られ，計算すると

$$-\frac{\sqrt{6}}{2}p+r=\frac{1}{2} \qquad ②$$

となる．

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|^2=1$ より $\left(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}\right)^2=1$ が得られ，計算すると

$$3p^2-\sqrt{6}pr+r^2=1 \qquad ③$$

①〜③より，

$$p=q=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ r=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(± 　は複号同順)

これらを用いて，$k=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を計算すると，

$$k=\vec{a}\cdot\left(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}\right)=\frac{\sqrt{2}\left(\pm3-\sqrt{3}\right)}{8}$$

である．$k>0$ から

$$\underline{\frac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{3}\right)}{8}}$$

【4】

正の整数 a に対して,

$$a = 3^b c \quad (b, c \text{ は整数で } c \text{ は } 3 \text{ で割り切れない})$$

の形に書いたとき，$B(a) = b$ と定める．例えば，$B(3^2 \cdot 5) = 2$ である．
m, n は整数で，次の条件を満たすとする．
(i) $1 \leqq m \leqq 30$
(ii) $1 \leqq n \leqq 30$
(iii) n は 3 で割り切れない
このような $(m,\ n)$ について

$$f(m,\ n) = m^3 + n^2 + n + 3$$

とするとき,

$$A(m,\ n) = B(f(m,\ n))$$

の最大値を求めよ．また，$A(m,\ n)$ の最大値を与えるような $(m,\ n)$ をすべて求めよ．

【解答例】

$(m,n) = (3,11), (12,11), (21,11), (30,11)$ のときに，$f(m,n)$ の値はそれぞれ $162, 1863, 9363, 27135$ となり,

$$A(m,n) = 4$$

となる. (m,n) が他の値のときは, $A(m,n) < 4$ が成立することを示す.

- m が 3 の倍数でないならば, このとき

$$m = 3k \pm 1 \qquad (k \text{ は自然数})$$

とおけるため

$$m^3 = (3k+1)^3 = 9\left(3k^2 \pm 3k + 1\right) \pm 1$$

より,

$$m^3 \equiv \pm 1 \mod 9 \qquad ①$$

また, n は 3 の倍数でないため,

$$n \equiv 1, 2, 4, 5, 7, 8 \mod 9$$

のどれかであり, このとき, それぞれ

$$n^2 + n + 3 \equiv 5, 0, 5, 6, 5, 3 \mod 9 \quad ②$$

となる.

よって, ①、②より, $m^3 + n^2 + n + 3$ が 9 の倍数となる m, n は存在しない. よって,

$$A(m,n) < 2$$

であるといえる.

- よって, m は 3 の倍数である. このとき, m^3 は 27 の倍数である. よって, $A(m,n) \geq 3$, つまり $f(m,n)$ が 27 の倍数であるためには $n^2 + n + 3$ が 9 の倍数であることが必要のため, 2 から $n \equiv 2 \mod 9$ が必要である.

よって

$$n \equiv 2, 11, 20 \mod 27$$

である.

$f(m,n)$ が 27 の倍数であるためには, n^2+n+3 が 27 の倍数であることが必要十分. $n \equiv 2, 11, 20 \mod 27$ で, それぞれに対して

$$n^2 + n + 3 \equiv 9, 135, 423 \mod 27$$

より, この中で 27 の倍数は 135 のみより,

$$n \equiv 11 \mod 27$$

が必要.

よって, $1 \leq n \leq 30$ より $n = 11$ が $A(m,n) \geq 3$ であるために必要.

次ページへ続く.

- $A(m,n) \geq 4$, つまり $f(m,n)$ が 81 の倍数であるための必要条件を求める. $m=3k \quad (k$ は自然数$)$ として,

$$\begin{aligned} f(m,n) &= 27k^3+135 \\ &= 27\left(k^3+5\right) \end{aligned}$$

　よって, k^3+5 が 3 の倍数であることが必要であり, $k \equiv 0,1,2 \mod 3$ のとき, $k^3+5 \equiv 1,0,1 \mod 3$ のため, $k \equiv 1 \mod 3$ が必要. よって $k=3l-2 \quad (l$ は自然数$)$ とおけて,

$$m=9l-6$$

　このとき, $1 \leq m \leq 30$ つまり, $m=3,12,21,30$ のみであり, この

$$(m,n)=(3,11),(12,11),(21,11),(30,11)$$

は当初に掲げた四つである.

よって,

$\underline{A(m,n) \text{ の最大値は } 4}$であり,
$\underline{(m,n)=(3,11),(12,11),(21,11),(30,11)}$

【5】

縦 4 個，横 4 個のマス目のそれぞれに 1,2,3,4 の数字を入れていく．このマス目の横の並びを行といい，縦の並びを列という．どの行にも，どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ．下図はこのような入れ方の 1 例である．

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

【解答例】

まずは 1 の置き場所を考える．これは 1 行目のどこに置くかで 4 通り．2 行目は, 1 行目と違う場所に置くため 3 通り．3 行目は, 1, 2 行目と違う場所より 2 通り．4 行目は残った 1 通りより,

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

通り存在する．

ここで, 条件を満たすどんな配置も列をうまく入れ替えることで, 下の図 1 のように 1 を配置し, かつ条件を満たす配置にすることができる．

1			
	1		
		1	
			1

図 1

よって, 図 1 の 1 の配置で, かつ条件を満たす物の個数を数えて, それを 24 倍すると求める値になる．

また, 1 行目の 2 列目には 2, 3, 4 のいずれかが入るが, 2, 3, 4 を適宜入れ替えることで, 1 行目の 2 列目が 2 のものの個数と 3 のものの個数と, 4 のものの個数が等しいことがわかる．よって, 1 行目の 2 列目が 2 である場合の個数を求め, 3 倍すればよい．

1	2		
	1		
①		1	②
			1

図 2

図 2 に示した 1, 2 のいずれか一方に 2 が入る．

(A) 2 を①に入れる場合.

2 の入れ方は, 次の図 3 で確定する．a には同じ値が入るため, $a=3$ と $a=4$ の場合とで 2 通り.

1	2	a	
a	1		2
2		1	a
	a	2	1

図 3

(B) 2 を②に入れる場合.

残りの 2 の入れ方は図 4 と図 5 の 2 通りある.

1	2		a
a	1	2	
	a	1	2
2		a	1

図 4

1	2	c	d
2	1	d	c
a	b	1	2
b	a	2	1

図 5

図 4 の場合においては, a に同じ値が入って $a=3$ と $a=4$ の 2 通り.

また, 図 5 の場合においては $(a,b)=(3,4)$ または $(4,3)$ で, $(c,d)=(3,4)$ または $(4,3)$ で $2 \times 2 = 4$ 通り である.

なので, 図 4 と図 5 の場合を合わせて 6 通り.

以上(A), (B)の場合を合わせて 8 通りの場合がある. よって, 求める入れ方は

$$8 \times 3 \times 24 = \underline{576 \text{ 通り}}$$

【6】

x, y, z を座標とする空間において，xz 平面内の曲線

$$z=\sqrt{\log(x+1)}\quad(0 \leqq x \leqq 1)$$

を z 軸のまわりに 1 回転させるとき，この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする．この S をさらに x 軸のまわりに 1 回転させるとき，S が通過した部分よりなる立体を V とする．V の体積を求めよ

【解答例】

図形 S は，$z=\sqrt{\log\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}$ と書くことができる．平面 $x=t(-1 \leqq t \leqq 1)$ で S を切断すると図 1 のような曲線 $z=\sqrt{\log\left(1+\sqrt{t^2+y^2}\right)}$ となる．

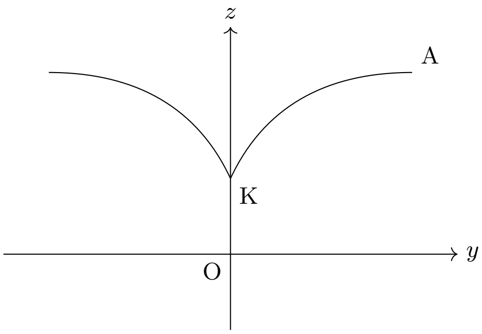


図 1

ここで，点 A，K の座標を $\mathrm{A}\left(t, \sqrt{1-t^2}, \sqrt{\log 2}\right)$，$\mathrm{K}\left(t, 0, \sqrt{\log(1+t)}\right)$ とおく．

曲線 $z=\sqrt{\log\left(1+\sqrt{t^2+y^2}\right)}$ 上の点を P とおき，その y 座標を k とする．

$\mathrm{OP}^2=k^2+\log\left(1+\sqrt{t^2+k^2}\right)$ となる．この式は $0 \leqq k \leqq \sqrt{1-t^2}$ で連続であり，k に対して単調増加である．よって，点 O と曲線 $z=\sqrt{\log\left(1+\sqrt{t^2+y^2}\right)}$ 上の点の距離は OK で最小値 $\sqrt{\log(t+1)}$，OA で最大値 $\sqrt{1+\log 2-t^2}$ をとり，その 2 つの値の間の距離を全て取りうる．

よって S を x 軸の周りに回転させると図 2 のようになる．ただし，斜線部分が S の通りうる領域である．

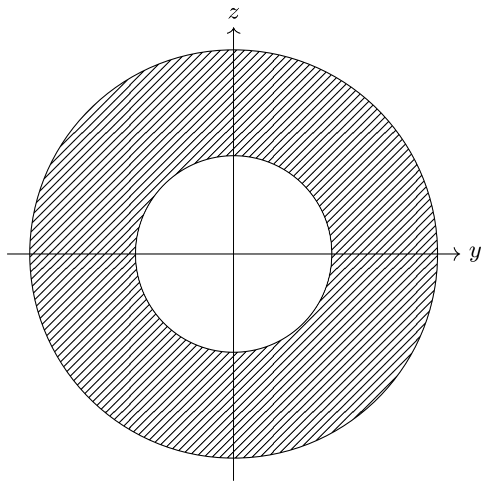


図 2

外側の円の半径を r_1，内側の円の半径を r_2 とすると，$r_1^2=1+\log 2-t^2$，$r_2^2=\log(t+1)$ となるから，斜線部分の面積は $\pi\left(r_1^2-r_2^2\right)$．S の対称性より，求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V&=2\int_0^1 \pi\left(r_1^2-r_2^2\right)dt\\
&=2\pi\int_0^1\left(1+\log 2-t^2-\log(t+1)\right)dt\\
&=2\pi\left[(1+\log 2)t-\frac{t^3}{3}-(t+1)\log(t+1)+(t+1)\right]_0^1\\
&=\underline{\frac{10}{3}\pi-2\pi\log 2}
\end{aligned}$$